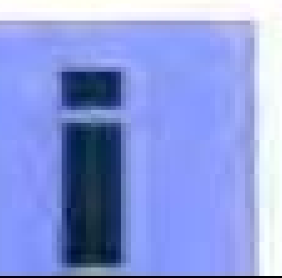
数学小丛书



祖冲之算π之谜

虞言林　虞琪

π





(O-1388.0101) 责任编辑：马 虹／总体设计：黄华斌／责任印制：安春生

数学小丛书



ISBN 7-03-009423-9/O·1388

全套书定价 99.00 元(共18册)

数学小丛书 17

祖冲之算 π 之谜

虞言林　虞　琪

科 学 出 版 社

2002

内 容 简 介

公元400多年，祖冲之公布了一条震惊世界的不等式 $3.1415926<\pi<3.1415927$. 但是祖冲之求得不等式的方法失传了，这就成了一个谜. 本小册子以刘徽的割圆术为基础，运用当今中学的数学知识，介绍一个算 π 的方法，它很可能与失传了的祖冲之方法有关. 小册子的后半部描绘了古典割圆术的一个可能的发展. 这个发展必然会指向微积分学，从而可以为一些想学微积分的读者提供一个背景材料.

图书在版编目(CIP)数据

祖冲之算 π 之谜/虞言林，虞琪. —北京：科学出版社，2002

(数学小丛书)

ISBN 7-03-009423-9

Ⅰ. 祖… Ⅱ. ①虞…②虞… Ⅲ. 数学-普及读物 Ⅳ. O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第010169号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年5月第一版	开本:787×960 1/32
2002年5月第一次印刷	印张:2 3/4 插页:1
印数:1—5 000	字数:39 000

全套书定价: 99.00元(共18册)

出版说明

1956年，为了向青少年传播数学知识，科学出版社配合我国首次举办的高中数学竞赛，出版了老一辈数学家华罗庚教授的《从杨辉三角谈起》和段学复教授的《对称》.在20世纪60年代初，这两本书连同其他一些著名数学家撰写的科普著作，被北京市数学会编成小丛书，相继由不同的出版社出版，并多次重印.

由数学大师和著名数学家亲自执笔撰写的这套数学小丛书是我国数学普及读物中的精品，曾激发一代青少年学习数学的兴趣.书中蕴涵的深刻而富有启发性的思想，促进了无数中学生在求学的道路上健康成长.当年这套小丛书的许多读者，现在已经成为学有所成的科学技术工作者，国家建设的栋梁之才.当年由老一辈数学家所倡导的我国的数学竞赛活动，现在已经得到蓬勃的发展.我国自1986年正式参加国际数学奥林匹克竞赛以来，历届都取得总分

第一或第二的好成绩. 近年来, 我国的数学普及读物无论是品种还是数量都在增加, 但是这套数学小丛书仍然无愧是其中别具特色的瑰宝, 理应成为传世之作. 因此, 我社取得作者或其继承人的同意, 并在可能的条件下, 请作者本人或相关学者对重新编辑的书稿进行了审订, 重新刊行这套数学小丛书, 以飨广大青少年读者.

数学是几千年人类智慧的结晶, 是一门古老而又常新的科学. 借此丛书再版之机, 我们特别增加两本新书: 虞言林教授等的《祖冲之算 π 之谜》和冯克勤教授的《费马猜想》. 前者介绍中国古代数学的一项重大成就, 后者阐述数学史上的一个著名猜想——费马定理历经 300 多年终于在 20 世纪末被证明的故事, 我们相信读者从中将会受到启迪.

本套丛书以新貌重新出版, 得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的资助, 谨表示衷心感谢.

目　　录

引　　言

祖冲之是我国古代的伟大数学家.他生于公元429年,卒于公元500年.在祖冲之的数学成就中最引人注意的是关于圆周率π的计算.唐朝长孙无忌的《隋书》卷十六律历卷十一中这样写道:

"古之九数,圆周率三,圆径率一,其术疏舛.自刘歆、张衡、刘徽、王蕃、皮延宗之徒各有新率,未臻折衷.宋末,南徐州从事史祖冲之更开密法,以圆径一亿为一丈,圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽,朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽,正数在盈朒二限之间.密率:圆径一百一十三,圆周三百五十五.约率:圆径七,圆周二十二.又设开差幂、开差立,兼以正员参之,指要精密,算氏之最者也.所著之书称为《缀术》,学官莫能究其深奥,是故废而不理."

上述记载谈到了祖冲之的两个贡献.其一是他得到的不等式

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927,$$

其二是他用$\frac{22}{7}$作为 π 的约率，$\frac{355}{113}$作为密率. 祖冲之的这两个贡献皆是领先 1000 年的世界记录. 公元 1424 年阿拉伯数学家 A. 卡西才打破祖的第一项记录，公元 1573 年德国数学家 V. 奥托才得到密率$\frac{355}{113}$.

关于密率$\frac{355}{113}$的评说，我们建议大家去看华罗庚先生写的小册子《从祖冲之的圆周率谈起》[1]，而这本小册子只谈祖冲之的不等式：

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

祖冲之在他的那个时代中能算出精确到小数点后 7 位的 π 值，是令人惊奇的. 他是如何算的呢？现在已经说不清了，因为记载中的祖冲之的著作《缀术》已经失传.《缀术》的丢失无疑是人类文明发展史中的一大损失.

1500 年来人们只能去猜测祖冲之的算 π 方法. 众说纷纭，莫衷一是. 到了清朝，似乎出现了主流的意见，即认为：根据祖冲之生活时代的数学发展情况，除开继续使用刘徽的割圆术外不存在有其他方法的可能性. 清代数学家阮元

---

① 此书为本套小册书之 3.

的《畴人传·祖冲之传》中写道："厥后祖冲之更开密法，仍割之又割耳，未能于徽法之外别有新法也."梅文鼎的著作以及后来的御制"数理精蕴"中皆表露出这种观点.民国以后，不相信清代主流意见的人逐渐多起来，不少人相信祖冲之有他自己的方法，只不过是失传了.于是祖冲之算 π 现在还是一个谜，一个有多年历史的谜.

解开这个谜的惟一途径是在古物的发掘中，在民间的秘藏里找回《缀术》，并经认真考证，得出结论.但是在找回《缀术》之前，人们提出一些猜测和假说，筛选出可能合理的结论，这也算得上是一种喜闻乐道的途径吧.这本小册子将沿着第二条途径来分析祖冲之算 π 之谜.全书内容安排如下：节 1 介绍刘徽的割圆术，它是本书的知识基础与分析问题的依据.节 2 介绍作者之一作过的一次尝试，表明只用当今中学生掌握的知识也可以不太费事地手算出精确到小数点后 7 位的 π 值.这提供了一个理论依据，以利于破解祖冲之算 π 之谜.节 3 以后是为中学水平的读者写的.设想他回到祖冲之时代，看看用自己掌握的知识可否对割圆术做些推进，补一补老祖宗们错过的计算.

1 刘徽的割圆术

人类的几个古代文明(希腊文明,东方的文明等)对圆的周长与面积都有一个共同的认识.那就是:有一个常数 π,使得对于半径为 r 的圆,其周长 $L(r)$ 与面积 $S(r)$ 满足下列公式

$$L(r) = 2\pi r,$$

$$S(r) = \pi r^2.$$

在这样的认识下,自然导致人们对 π 的精确值之追求.公元前 200 多年希腊的阿基米德,公元 3 世纪中国的刘徽分别建立了割圆术以求 π 的近似值.割圆术的想法是以圆内接或外切正多边形来逼近圆,算出多边形的周长或面积作为圆的周长或面积的近似值,从而再用上面的圆周长或面积公式得到 π 的近似值.阿基米德着眼于周长,刘徽着眼于面积,使得他们的割圆术有微小差别.后来的事实表明,这种微小的差别导致中国古代割圆术领先世界.刘徽是功不可

没的.

考虑单位圆(即半径为 1 的圆)的内接正 n 边形,令其面积为 S_n. 采用现代数学记号,刘徽的割圆术可以总结为下列三条:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pi$.

(2)刘徽不等式:对于 $n\geqslant 6$,

$$S_{2n} < \pi < 2S_{2n} - S_n.$$

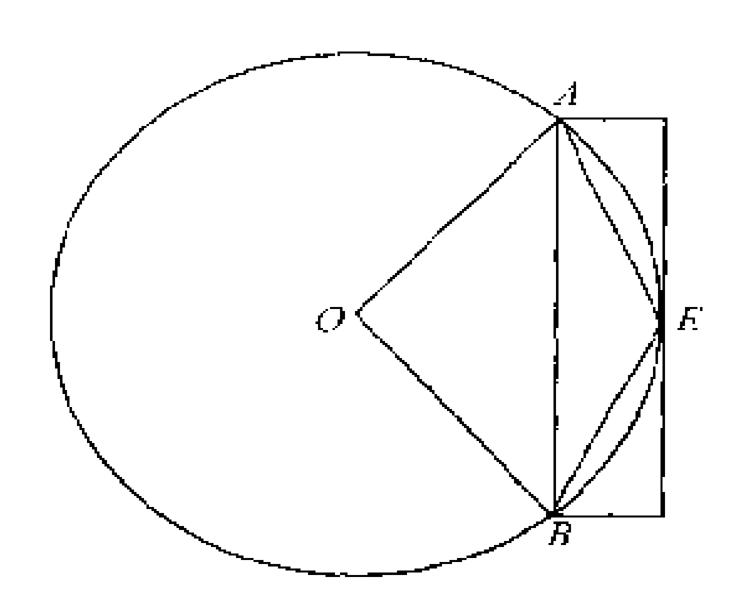
(3)弦矢互算法及与面积的关系:记内接正 n 边形的一边为 c_n, c_n 与单位圆圈围成的较小的那个弓形记作 G_n. 我们称 c_n 为 G_n 的弦. 弦的中垂线在 G_n 中的一段称为 G_n 的矢,并记作 a_n. 为方便计, a_n, c_n 的长度也分别记作 a_n, c_n. 利用勾股定理,有下列弦矢互算公式

$$\begin{cases} a_n = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{c_n^2}{4}}, \\ c_{2n} = \sqrt{a_n^2 + \dfrac{c_n^2}{4}}. \end{cases}$$

此外有弦矢表示面积的公式

$$S_{2n} = \frac{n}{2} c_n = S_n + \frac{n}{2} a_n c_n.$$

现在我们对上面的刘徽不等式给予证明.设 O 是单位圆的圆心，如图所示，其中 $AB = c_n$. 于是取 E 为弧$\overset{\frown}{AB}$的中点后，便知 $AE = BE = c_{2n}$以及



$$|\triangle AOE| + |\triangle EOB| = |\triangle AOB| + |\triangle ABE|,$$

其中$|\triangle AOE|$表示三角形$\triangle AOE$ 的面积.将上式乘 n 便得

$$S_{2n} = S_n + n \cdot |\triangle ABE|,$$

或$|\triangle ABE| = \frac{1}{n}(S_{2n} - S_n)$.作一个矩形以 AB 为边并且对边过 E 点.易见该矩形的面积是$2|\triangle ABE|$，并且 n 个这种矩形与圆内接正 n 边形合起来能盖住圆，从而圆的面积 π 满足

$$\pi < S_n + n \cdot (\text{矩形面积})$$

$$= S_n + n\cdot(2|\triangle ABE|)$$

$$= S_n + 2(S_{2n} - S_n)$$

$$= 2S_{2n} - S_n.$$

又由于 $S_{2n} < \pi$ 是显然的,故我们得到刘徽不等式.

刘徽割圆术的第三条,由于较易,其证明从略.至于第一条,我们在节3中再来讨论.

刘徽根据上面的理论,依次算出 S_6, S_{12}, S_{24}, S_{48}, S_{96}, S_{192},然后便得到 π 的近似值 3.14.具体的计算过程分为四段,记载在刘徽的《九章算术注》中.这四段分别是

(1)割六觚以为十二觚,

(2)割十二觚以为二十四觚,

(3)割二十四觚以为四十八觚,

(4)割四十八觚以为九十六觚.

各段中的算法都是一样的,人们把它们总结为刘徽割圆术的第三条.例如第四段.那是从 c_{48} 开始依次算出 a_{48}, c_{96}, S_{192} 的过程.而后再用刘徽不等式来确定这时的 π 的近似值.第四段的原文抄录如下:

"割四十八觚以为九十六觚,术曰:亦令半径为弦,半面为勾,为之求股.置次上弦幂,四而一,得四十二亿七千七百五十六万九千七百三

忽，余分弃之，即勾幂也.以减弦幂，其余开方除之，得股九寸九分七厘八毫五秒八忽十分忽之九.以减半径，余二厘一毫四秒一忽十分忽之一，谓之小勾.觚之半面，又谓小股.为之求小弦，其幂四十二亿八千二百一十五万四千一十二忽，余分弃之，开方除之，得小弦六分五厘四毫三秒八忽.余分弃之，即九十六觚之一面.以半径一尺乘之，又以四十八乘之，得幂三万一千四百一十亿二千四百万忽.以百亿除之，得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四，即一百九十二觚之幂也.以九十六觚之幂减之，余六百二十五分寸之一百五，谓之差幂.倍之，为分寸之二百一十，即九十六觚之外弧田，所谓以弦乘矢之凡幂也.加此幂于九十六觚之幂，得三百一十四寸六百二十五分寸之一百六十九，则出圆之表矣.故还就一百九十二觚之全幂三百一十四寸，以为圆幂之定率，而弃其余分."

上面原文在本册第 9,10 页的表中被依次解释.

表中的名词中，多次出现一个古字"觚".如果把这个"觚"字理解为"挖去内接多边形的圆盘"，那么理解上面的各个词似乎不受影响，并且这一段的小标题"割四十八觚以为九十六觚"也说得通.不过有的古人把觚字等同于"弧".因此大家可不必相信我们对觚字的解释，但是我

名词	中间变量及算式表达	刘徽计算值	今译名
半径	弦	1尺	1
半面	第三段算出的48觚之半面	0.06543尺	$\frac{1}{2}c_{48}$
	勾=半面	0.06543尺	$\frac{1}{2}c_{48}$
次上弦幂	第三段算出的小弦之幂	171.10278813亿	c_{48}^2
	勾幂=勾^2=$\frac{1}{4}$次上弦幂	42.77569703亿=0.004277569703尺^2	$\frac{1}{4}c_{48}^2$
	弦幂=弦^2	1尺^2	1
	股=$\sqrt{弦幂-勾幂}$	$(0.997858+\frac{9}{10}\times10^{-6})$尺	$\sqrt{1-\frac{1}{4}c_{48}^2}$
	小勾=半径−股	$(0.002141+\frac{1}{10}\times10^{-6})$尺	$1-\sqrt{1-\frac{1}{4}c_{48}^2}=a_{48}$
	小股=48觚之半面	0.06543尺	$\frac{1}{2}c_{48}$

续 表

名　　词	中间变量及算式表达	刘徽计算值	今译名
	小弦幂=(小勾)²+(小股)²	42.82154012 亿	$c_{96}^2=a_{48}^2+\frac{1}{4}c_{48}^2$
96 觚之一面	小弦=√小弦幂	0.065438 尺	c_{96}
192 觚之幂	小弦×半径×48	31410.2400 亿 $=314\frac{64}{625}$ 寸²	$S_{192}=48c_{96}$
96 觚之幂	第三段算出	$313\frac{584}{625}$ 寸²	S_{96}
差幂	192 觚之幂－96 觚之幂	$\frac{105}{625}$ 寸²	$S_{192}-S_{96}$
96 觚之外弧田	差幂×2－弦乘矢之凡幂	$\frac{210}{625}$	$2(S_{192}-S_{96})-96c_{96}a_{96}$
出圆之表者	96 觚之幂+96 觚之外弧田	$314\frac{169}{625}$ 寸²	$2S_{192}-S_{96}$
192 觚之全幂	192 觚之幂取整	314 寸²	
圆幂之定率		3.14	π 的近似值

们的数学理解还是对的.

让我们回到刘徽的计算.在第四段末尾,刘徽得到一个不等式

$$S_{192}=3.14+\frac{64}{625}\%<\pi<S_{96}+2(S_{192}-S_{96})$$

$$=3.14+\frac{169}{625}\%,$$

并取 3.14 作为 π 的近似值.

祖冲之是否只用刘徽不等式算出他的结果呢? 在回答之前,让我们用现代计算工具试算一下.刘徽算到 96 觚时,他便得到 S_{192}.因此我们令 $\pi_n=S_{2n}$ 以使得我们看到 π_n 时便知要算到 n 觚,即算到正 n 边形.计算的结果(保留小数点后 8 位)如下:

$$\pi_6=3,$$

$$\pi_{12}\doteq 3.10582854\cdots,$$

$$\pi_{24}\doteq 3.13262861\cdots,$$

$$\pi_{48}\doteq 3.13935020\cdots,$$

$$\pi_{96}\doteq 3.14103195\cdots,$$

$$\pi_{192}\doteq 3.14145247\cdots,$$

$$\pi_{384}\doteq 3.14155760\cdots,$$

$$\pi_{768}=3.14158389\cdots,$$

$$\pi_{1536}=3.14159046\cdots,$$

$$\pi_{3072}=3.14159210\cdots,$$

$$\pi_{6144}=3.14159251\cdots,$$

$$\pi_{12288}=3.14159261\cdots,$$

$$\pi_{24576}=3.14159264\cdots.$$

由于

$$2\pi_{12288}-\pi_{6144}=3.14159272\cdots,$$

$$2\pi_{24576}-\pi_{12288}=3.14159267\cdots,$$

故祖冲之的结果能来自于

$$\pi_{24576}<\pi<2\pi_{24576}-\pi_{12288},$$

而不能来自于

$$\pi_{12288}<\pi<2\pi_{12288}-\pi_{6144}.$$

这说明:如果只用刘徽不等式来得到祖冲之的结果,人们必须算出 π_{24576},而且还要保证 π_{24576} 和($2\pi_{24576}-\pi_{12288}$)有小数点后 7 位的精度.换句话说,在刘徽算的 4 段之后,还须接着往下算 8 段($24576=96\cdot2^8$),并且在每一段的计算中

要比刘徽算得多，即计算 c_n，a_n 时大约需要保持 9 位数字. 作这样的计算，对古人来讲，实在太艰巨了.

上面的说法中我们需要解释一点的是：若在 12 段的计算中都保持所算的 c_n，a_n 有 9 位数字，那么必定能保证 π_{24576} 有小数点后 7 位的精度吗？问题的答案是肯定的. 这里提到的 9 位计算是文献[1]指出的.

2 祖冲之不等式

对清朝主流意见持着怀疑的态度，本书作者之一在参考文献[11]中，作了一次尝试，表明在没有微积分的祖冲之时代，可以有新法更有效地计算 π. 当今的中学数学可以推导出下列的

定理(祖冲之不等式) 设 n 是大于或等于 6 的偶数，则有

$$\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n<\pi<\frac{8}{3}S_{2n}-2S_n+\frac{1}{3}S_{\frac{n}{2}}.$$

注 这里的祖冲之不等式也许未必为祖冲之本人证得. 所以这么命名眼下暂说是出自对祖冲之的尊敬.

在证明上述不等式之前，让我们先来认识这个不等式的优越性. 用现代计算工具可算得

$$\frac{4}{3}\pi_{192}-\frac{1}{3}\pi_{96}=3.14159264\cdots,$$

$$\frac{8}{3}\pi_{384} - 2\pi_{192} + \frac{1}{3}\pi_{96} = 3.14159266\cdots$$

由此立得祖冲之的结果

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

下面分 5 个引理讨论以证得祖冲之不等式.

引理 2.1(弦矢互算法的变形)

$$\begin{cases} a_n = 4a_{2n}\left(1 - \dfrac{a_{2n}}{2}\right), \\ c_n = 2c_{2n}(1 - a_{2n}). \end{cases}$$

证明 由刘徽的弦矢互算法

$$\begin{cases} a_n = 1 - \sqrt{1 - \dfrac{c_n^2}{4}}, \\ c_{2n} = \sqrt{a_n^2 + \dfrac{c_n^2}{4}} \end{cases}$$

的第一式得

$$c_n^2 = 4\{1 - (1 - a_n)^2\} = 8a_n\left(1 - \frac{a_n}{2}\right).$$

代入第二式得

$$c_{2n} = \sqrt{a_n^2 + 2a_n\left(1 - \frac{a_n}{2}\right)} = \sqrt{2a_n}.$$

从而

$$a_n = \frac{1}{2}c_{2n}^2 = 4a_{2n}\left(1 - \frac{a_{2n}}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} c_n^2 &= 8a_n\left(1 - \frac{a_n}{2}\right) \\ &= 8\cdot\left(\frac{1}{2}c_{2n}^2\right)\left\{1 - \frac{1}{2}\left[4a_{2n}\left(1 - \frac{a_{2n}}{2}\right)\right]\right\} \\ &= 4c_{2n}^2(1 - a_{2n})^2. \end{aligned}$$

于是引理得证.

至于为什么会想到引理 2.1 的公式？其实算不得偶然，因为从刘徽的公式

$$\begin{cases} S_{2n} = \dfrac{n}{2}c_n, \\ S_n = \dfrac{n}{4}c_{\frac{n}{2}}, \\ S_{2n} = S_n + \dfrac{n}{2}a_n c_n \end{cases}$$

中消去 S_n 和 S_{2n} 便得

$$c_{\frac{n}{2}} = 2c_n(1 - a_n).$$

引理 2.2 设 $n \geqslant 3$，则

$$\frac{S_{4n} - S_{2n}}{S_{2n} - S_n} > \frac{1}{4}.$$

证明 从刘徽公式

$$S_{2n}-S_n=\frac{n}{2}\cdot a_n c_n$$

可得

$$\frac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=2\cdot\frac{a_{2n}c_{2n}}{a_n c_n}.$$

再利用引理 2.1,有

$$2\cdot\frac{a_{2n}c_{2n}}{a_n c_n}$$

$$=2\cdot\frac{a_{2n}c_{2n}}{8a_{2n}c_{2n}\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)(1-a_{2n})}$$

$$>\frac{1}{4},$$

从而引理 2.2 得证.

引理 2.3 设 $n\geqslant 3$, 则

$$\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n<\pi.$$

证明 由刘徽的极限等式$\lim\limits_{k\to\infty}S_{2^k\cdot n}=\pi$得

$$\pi=\lim_{k\to\infty}\{S_n+(S_{2n}-S_n)+(S_{4n}-S_{2n})+\cdots+(S_{2^{k+1}\cdot n}-S_{2^k\cdot n})\}.$$

注意到

$$S_{2^{k+1}\cdot n}-S_{2^k\cdot n}>\frac{1}{4}(S_{2^k\cdot n}-S_{2^{k-1}\cdot n})$$

$$>\left(\frac{1}{4}\right)^2(S_{2^{k-1}\cdot n}-S_{2^{k-2}\cdot n})$$

$$>\cdots>\left(\frac{1}{4}\right)^k(S_{2n}-S_n),$$

故有

$$\pi=S_n+\lim_{k\to\infty}\{(S_{2n}-S_n)+(S_{4n}-S_{2n})$$

$$+\cdots+(S_{2^{k+1}\cdot n}-S_{2^k\cdot n})\}>S_n$$

$$+\lim_{k\to\infty}\left\{(S_{2n}-S_n)\left[1+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\right\}$$

$$=S_n+\lim_{k\to\infty}\left\{(S_{2n}-S_n)\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{4}}\right\}$$

$$=\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n.$$

引理 2.4 设 n 是大于或等于 6 的偶数，则

$$\frac{(2S_{4n}-S_{2n})-(2S_{2n}-S_n)}{(2S_{2n}-S_n)-(2S_n-S_{\frac{n}{2}})}>\frac{1}{4}.$$

证明　$2S_{2n}-S_n$ 是刘徽不等式中的上界，初想起来，随着 n 增大，上界会减小，即

$$2S_{4n}-S_{2n}<2S_{2n}-S_n.$$

我们现在就先来证明这一个不等式.注意到

$$\begin{aligned}
&(2S_{4n}-S_{2n})-(2S_{2n}-S_n)\\
&=2(S_{4n}-S_{2n})-(S_{2n}-S_n)\\
&=2\left(\frac{2n}{2}\cdot a_{2n}c_{2n}\right)-\left(\frac{n}{2}a_nc_n\right)\\
&=2na_{2n}c_{2n}-\frac{n}{2}\cdot 8a_{2n}c_{2n}(1-a_{2n})\\
&\quad\cdot\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)\\
&=2na_{2n}c_{2n}(-1+3a_{2n}-a_{2n}^2),
\end{aligned}$$

以及当 $n>3$ 时 $a_{2n}\leqslant a_6=1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{1-1.7}{2}=\frac{3}{20}$，我们便有

$$\begin{aligned}
&(2S_{4n}-S_{2n})-(2S_{2n}-S_n)\\
&=2na_{2n}c_{2n}(-1+3a_{2n}-a_{2n}^2)\\
&<2na_{2n}c_{2n}\left(-1+3\cdot\frac{3}{20}\right)<0.
\end{aligned}$$

由此可知引理 2.4 中不等式左端的分母小于零,从而欲证的引理 2.4 中的不等式等价于

$$(2S_{4n}-S_{2n})-(2S_{2n}-S_n)$$

$$<\frac{1}{4}\{(2S_{2n}-S_n)-(2S_n-S_{\frac{n}{2}})\},$$

亦即

$$2na_{2n}c_{2n}(-1+3a_{2n}-a_{2n}^2)$$

$$<\frac{1}{4}na_nc_n(-1+3a_n-a_n^2).$$

利用 $a_n=4a_{2n}\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)$和 $c_n=2c_{2n}(1-a_{2n})$,上式等价于

$$-1+3a_{2n}-a_{2n}^2$$

$$<\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)(1-a_{2n})(-1+3a_n-a_n^2)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)(1-a_{2n})$$

$$\cdot\left[-1+12a_{2n}\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)\right.$$

$$\left.-16a_{2n}^2\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)^2\right].$$

若记 $a_{2n}=u$,则上述不等式整理为

$$u\left(\frac{21}{2}-\frac{79}{2}u+55u^2-39u^3+14u^4-2u^5\right)>0.$$

由于 $0<u=a_{2n}<1$，故有

$$55u^2-39u^3+14u^4-2u^5=16u^2+12u^4$$
$$+(1-u)(39u^2+2u^4)>0.$$

又由于

$$a_6=4a_{12}\left(1-\frac{1}{2}a_{12}\right)$$

和

$$a_6=1-\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{3}{20},$$

故又有

$$u=a_{2n}\leqslant a_{12}=\frac{1}{4}\cdot a_6\cdot\left(1-\frac{1}{2}a_{12}\right)^{-1}$$
$$<\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{20}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1}=\frac{3}{40}.$$

至此我们便证得

$$u\left\{\left(\frac{21}{2}-\frac{79}{2}u\right)+(55u^2-39u^3+14u^4-2u^5)\right\}$$
$$>u\left(\frac{21}{2}-\frac{79}{2}u\right)>u\left(\frac{21}{2}-\frac{79}{2}\cdot\frac{3}{40}\right)>0.$$

这样一来，我们就证明了引理 2.4.

引理 2.5 设 n 是大于或等于 6 的偶数，则

$$\pi < \frac{8}{3}S_{2n} - 2S_n + \frac{1}{3}S_{\frac{n}{2}}.$$

证明 由刘徽的极限等式知

$$\lim_{n\to\infty}(2S_{2n} - S_n) = 2\lim_{n\to\infty}S_{2n} - \lim_{n\to\infty}S_n$$

$$= 2\pi - \pi = \pi,$$

故

$$\pi = \lim_{k\to\infty}(2S_{2^{k+1}n} - S_{2^k n})$$

$$= \lim_{k\to\infty}\{(2S_{2n} - S_n) + [(2S_{4n} - S_{2n}) - (2S_{2n} - S_n)]$$

$$+ \cdots + [(2S_{2^{k+1}n} - S_{2^k n}) - (2S_{2^k n} - S_{2^{k-1}n})]\}$$

$$= (2S_{2n} - S_n) + \lim_{k\to\infty}\{[(2S_{4n} - S_{2n}) - (2S_{2n} - S_n)]$$

$$+ \cdots + [(2S_{2^{k+1}n} - S_{2^k n}) - (2S_{2^k n} - S_{2^{k-1}n})]\}.$$

我们把上式右端的第 2 项记为

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{k}[(2S_{2^{l+1}n} - S_{2^l n}) - (2S_{2^l n} - S_{2^{l-1}n})],$$

或者记为

$$\sum_{l=1}^{\infty}[(2S_{2^{l+1}n} - S_{2^l n}) - (2S_{2^l n} - S_{2^{l-1}n})].$$

注意到引理 2.4 中不等式左端的分母是负数，那里的不等式可写为

$$(2S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n})-(2S_{2^l n}-S_{2^{l-1}n})$$

$$<\frac{1}{4}[(2S_{2^l n}-S_{2^{l-1}n})-(2S_{2^{l-1}n}-S_{2^{l-2}n})].$$

从而对于 $l\geqslant 1$ 有

$$(2S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n})-(2S_{2^l n}-S_{2^{l-1}n})$$

$$<\left(\frac{1}{4}\right)^l[(2S_{2n}-S_n)-(2S_n-S_{\frac{n}{2}})].$$

于是

$$\pi=(2S_{2n}-S_n)+\sum_{l=1}^{\infty}[(2S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n})$$

$$-(2S_{2^l n}-S_{2^{l-1}n})]<(2S_{2n}-S_n)$$

$$+[(2S_{2n}-S_n)-(2S_n-S_{\frac{n}{2}})]\cdot\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^l$$

$$=(2S_{2n}-S_n)+[2S_{2n}-3S_n+S_{\frac{n}{2}}]\cdot\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{8}{3}S_{2n}-2S_n+\frac{1}{3}S_{\frac{n}{2}}.$$

引理 2.5 得证.

引理 2.3 与引理 2.5 合起来就是祖冲之不等式. 在上面推导祖冲之不等式的过程中, 当今中学生的数学知识是足够了的. 这一事实可以作为我们推测祖冲之算 π 的重要依据. 令我们惊奇的是, 在我国台湾作家傅溥写的《中国数学发展史》一书第 92～94 页中居然描述了祖冲之之子祖暅有一个算 π 的绝招. 这个绝招可以从刘徽算出的数据中找到 π 的近似值 3.141584. 这个绝招的算法在此书第 94 页陈述为下列两个式子:

$$\pi_n \doteq \pi_{96} + \frac{105}{625}(4^{-1} + 4^{-2} + \cdots + 4^{-n})$$

$$= 3.14\left\{\frac{64}{625} + \frac{105}{625}(1 + 4^{-1} + 4^{-2} + \cdots + 4^{-n} - 1)\right\}$$

$$= 3.14\left\{\frac{64}{625} + \frac{105}{625}\left(\frac{1 - 4^{-n-1}}{1 - 4^{-1}} - 1\right)\right\},$$

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \pi_n$$

$$= 3.14\left\{\frac{64}{625} + \frac{105}{625}\left(\frac{4^{-1}}{1 - 4^{-1}}\right)\right\}$$

$$= 3.14\left\{\frac{64}{625} + \frac{105}{625} \times \frac{1}{3}\right\}$$

$$= 3.14\,\frac{99}{625}$$

$=3.141584$,

其中傅先生采用了小数分数混合表达法．例如 $3.14\frac{99}{625}$表示数$\left(3.14+\frac{99}{625}\%\right)$，即 $3.14+\frac{99}{62500}$．这个小数分数混合表达法是将刘徽本人对数字的表示方式硬译过来的．在刘徽割圆术的第四段计算中曾写道："……得幂三百一十四寸六百二十五分寸之六十四，即一百九十二觚之幂也．"傅先生译之为

$$\widetilde{S_{192}}=3.14\frac{64}{625}.$$

这个数其实就是 $3.14+\frac{64}{62500}$．同样"……即一百九十二觚之幂也．以九十六觚之幂减之，余六百二十五分寸之一百五，……"也就译为

$$\widetilde{S_{192}} \quad \widetilde{S_{96}}=\frac{105}{625}.$$

以上$\widetilde{S_{192}}$、$\widetilde{S_{96}}$表示刘徽算出的 S_{192}，S_{96}．于是傅先生的小数分数混合表达法中的数

$$3.14\left\{\frac{64}{625}+\frac{105}{625}\left(4^{-1}+4^{-2}+\cdots+4^{-n}\right)\right\}$$

就是

$$3.14+\left\{\frac{64}{625}+\frac{105}{625}(4^{-1}+4^{-2}+\cdots+4^{-n})\right\}\cdot\frac{1}{100},$$

或者就是

$$\widetilde{S_{192}}+(\widetilde{S_{192}}-\widetilde{S_{96}})(4^{-1}+4^{-2}+\cdots+4^{-n}).$$

从而用祖暅的绝招算出更精确的 π 的算法表为

$$\pi=\widetilde{S_{192}}+(\widetilde{S_{192}}-\widetilde{S_{96}})(4^{-1}+4^{-2}+\cdots)$$

$$=\frac{4}{3}\widetilde{S_{192}}-\frac{1}{3}\widetilde{S_{96}}.$$

这个绝招与引理 2.3 简直是太相似了. 傅的书中还简述了$(4^{-1}+4^{-2}+\cdots)$的由来,那是归纳出来的. 事实上,把刘徽算出的十二觚,二十四觚,四十八觚,九十六觚等之外弧田排成数列,你会发现一个近似的等比数列,公比是$\frac{1}{4}$. 至此我们可得到两个结论:

(1)傅先生掌握了关于祖暅绝招的材料.

(2)祖冲之父子拥有算 π 的独到方法.

这两个结论皆是令人鼓舞的.

下面我们来谈谈:假若一个人拥有祖氏绝招,他怎样来算 π 呢? 用现代计算工具可算得

$$\frac{4}{3}\pi_{96}-\frac{1}{3}\pi_{48}=3.14159253\cdots,$$

$$\frac{4}{3}\pi_{192}-\frac{1}{3}\pi_{96}=3.14159264\cdots,$$

$$\frac{4}{3}\pi_{384}-\frac{1}{3}\pi_{192}=3.14159265\cdots,$$

$$\frac{4}{3}\pi_{768}-\frac{1}{3}\pi_{384}=3.14159265\cdots,$$

$$\frac{4}{3}\pi_{1536}-\frac{1}{3}\pi_{768}=3.14159265\cdots.$$

俗话说:“事不过三.”经过三次检验通过的东西大概是没有问题的了.上面的计算结果表明等式

$$\pi=3.14159265\cdots$$

经过了再三的检查.于是大概可写下不等式

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

文献[1]告诉我们,祖冲之算到 π_{1536}.因此祖冲之一定看到了这个“事已过三”的现象了.他当然会去判断,会去论证.可惜的是我们现在已无法找到《缀术》,不然的话,可以从《缀术》中去寻觅祖冲之的思考的痕迹.

3 无穷小与极限

现在我们回来讨论刘徽的极限等式

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \pi.$$

首先不难看出，这个极限等式在刘徽法算 π 的过程中毫无用途，因为弦、矢、面积间的关系与刘徽不等式就已经足够了．那么刘徽在他的著作中为什么要阐述这一事实呢？郭书春[4]先生认为：刘徽是想以此给出下列公式

$$\begin{cases} L(r) = 2\pi r, \\ S(r) = \pi r^2 \end{cases}$$

的一个理论基础．这是一个颇有教益的看法．在经过上一节的讨论后，而今我们又可发现：在证明引理 2.3 和引理 2.5 时要用到刘徽的这个极限等式．想起来刘徽真有先见之明．现在让我们来看看刘徽是怎样陈述这一极限等式的．他写道：

"割之弥细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆周合体,而无所失矣."

刘徽的这段话也许是中国人第一次精辟地谈论极限,即宣称 $S_\infty=\pi$,或 S_n 的极限就是 π,或者说 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\pi$.

理解刘徽的极限等式有两个难点.第一难点在于 π 是什么? π 是一个无形的东西,古人称之为"率".它可以和数相乘(例如 $2\pi r$, πr^2),又能与数比大小(例如 $\pi<3.1416$).照当今的认识,它是一个实数.可是实数又是什么呢? 恐怕不是一下子就谈得清楚的.好在我们大家对 π 都有一个朴素的理解,正如古人刘徽、祖冲之一样.确切讲,π 是一个数(能做四则运算,比大小),使得对任意大于或等于 3 的整数 n,都有

$$S_{2n}<\pi<2S_{2n}-S_n.$$

第二难点就是"极限"."数列 $\{S_n\}$ 以 π 为极限"究竟是什么意思呢? 同语反复的解释是:数列 $\{S_n-\pi\}$ 以零为极限,或者说数列 $\{S_n-\pi\}$ 是一个"无穷小".因此我们若能把"无穷小"弄明白,"极限"也就明白了.

庄子说过:"一尺之棰,日取其半,万世不竭."话中的"万世不竭"应理解为"取其半"的过程将无休止.若以 a_n 表第 n 天剩下的棰之长度(以尺为单位),那么 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.于是庄子描述

了一个无穷数列$\{a_n\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots,\left(\frac{1}{2}\right)^n,\cdots\right\}$.可是这个数列有什么样的本质属性,庄子没有解释.数列$\{a_n\}$有这样一个属性:对于任意的n,$a_n\neq 0$.但是这个属性不是本质的,没有什么价值.庄子是一位哲学家而不是数学家,他未能达到后人刘徽的思想境界,而写下:"取之又取,以至于不可取,则于零合体,而无所剩矣."换句话说,庄子未能点破$\left\{\frac{1}{2},\left(\frac{1}{2}\right)^2,\cdots\right\}$是一个"无穷小",或说它以零为极限.那么什么是无穷小呢?

定义 3.1 设给定一个正整数N和一串大于零的整数$n_0,n_1,n_2\cdots$,我们构造一个(无穷)数列$\{a_n\}$如下:

$$a_n=\begin{cases} N, & \text{当 } 1\leqslant n\leqslant n_0 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } n_0+1\leqslant n\leqslant n_0+n_1 \text{ 时},\\ \frac{1}{2}, & \text{当 } n_0+n_1+1\leqslant n \\ & \quad \leqslant n_0+n_1+n_2 \text{ 时},\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{m}, & \text{当 } n_0+n_1+\cdots+n_{m-1}+1 \\ & \quad \leqslant n\leqslant n_0+n_1+\cdots+n_m \text{ 时},\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

换句话说，$\{a_n\}$是由 n_0 个 N，n_1 个 1，n_2 个 $\frac{1}{2}$，…按自大而小的顺序排列成的数列．我们把这样的$\{a_n\}$称做一个标准的无穷小．

定义 3.2 一个数列$\{b_1, b_2, \cdots\}$称为是一个无穷小．如果存在一个标准无穷小$\{a_1, a_2, \cdots\}$使得对所有的 n，

$$|b_n| \leqslant a_n .$$

例题 3.1 试证庄子数列$\left\{\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots\right\}$是一个无穷小．

证明 由于

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{(1+1)^n} = \frac{1}{1+n+\cdots} \leqslant \frac{1}{n},$$

若令$\{a_n\} = \left\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$，则

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{1}{n} \leqslant a_n .$$

注意到$\{a_n\}$是一个标准无穷小(当 $N = n_0 = n_1 = n_2 = \cdots = 1$ 时的标准无穷小)，故按定义 3.2 知庄子数列是一个无穷小．

习题 3.1 试证明

(i)若 $A_n = a_{2^n \cdot 6}$，其中 $n = 1, 2, \cdots$，则数列$\{A_n\}$是一个无穷小．这里 a_m 是前面介绍的弓

形 G_n 的矢.

（提示：先证 $a_{2n} \leqslant \frac{1}{2} a_n$，而后得 $A_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n a_6 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. 由于 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 是无穷小，从而立得 $\{A_n\}$ 是无穷小.）

(ii)若 $A_n = c_{2^n \cdot 6}$，则数列 $\{A_n\}$ 是一个无穷小.

(iii)若 $A_n = S_{2^n \cdot 6} - S_{2^{n-1} \cdot 6}$，则 $\{A_n\}$ 是一个无穷小.

（提示：先证 $A_{2n} \leqslant \frac{2}{3} A_n$. 再仿(i)来证.）

例题 3.2 若 $A_n = \pi - S_{2^n \cdot 6}$，则 $\{A_n\}$ 是一个无穷小.

证明 由于 π 满足刘徽不等式

$$S_{2^n \cdot 6} < \pi < 2S_{2^n \cdot 6} - S_{2^{n-1} \cdot 6},$$

所以

$$0 \leqslant \pi - S_{2^n \cdot 6} \leqslant (2S_{2^n \cdot 6} - S_{2^{n-1} \cdot 6}) - S_{2^n \cdot 6} = S_{2^n \cdot 6} - S_{2^{n-1} \cdot 6}.$$

利用习题 3.1(iii)的结论，可知 $\{\pi - S_{2^n \cdot 6}\}$ 是一个无穷小.

定义 3.3 (i)设给定一数列 $\{A_n\}$ 和一个数 A，如果新的数列 $\{A_n - A\}$ 是一个无穷小，那么我们称 A 为数列 $\{A_n\}$ 的极限，并记为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

(ii)设给定一数列$\{A_n\}$，如果存在一个数A，使得

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A,$$

则称数列$\{A_n\}$收敛，或者说$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$是存在的.

现在有了无穷小与极限的定义，又做了例题3.2，我们便知：刘徽的极限等式是刘徽不等式的简单推论. 须知，这样的认识依赖于人们对无穷小、极限的认识. 一旦发现了这样的概念，一些深奥莫测的事一下就明白了，数学也就在一个更高的层次上去发展了. 因此定义3.1，3.2和3.3看起来貌不惊人，其实是重要得很的. 有了这三个定义，便可容易地证出下面的定理(出现在高中的数学教材中的定理).

定理3.1 设$\{A_n\}$，$\{B_n\}$是两个收敛的数列，则$\{A_n + B_n\}$，$\{A_n - B_n\}$，$\{cA_n\}$，$\{A_nB_n\}$皆是收敛数列，其中c是常数. 此外还有

(i)若$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = B$，则$A = B$.

(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n + \lim\limits_{n\to\infty} B_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(A_n - B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n - \lim\limits_{n\to\infty} B_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(cA_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} A_n$,

$\lim\limits_{n\to\infty}(A_nB_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} A_n)(\lim\limits_{n\to\infty} B_n)$.

(iii)若$\lim\limits_{n\to\infty} B_n \neq 0$，则除去有限个元素外，数

列$\left\{\frac{A_1}{B_1},\frac{A_2}{B_2},\cdots,\frac{A_n}{B_n},\cdots\right\}$有定义(不能定义的元素$\frac{A_i}{B_i}$是分母$B_i=0$的情形),删除不能定义的元素得到一个新的数列,仍记为$\left\{\frac{A_1}{B_1},\cdots,\frac{A_n}{B_n},\cdots\right\}$,于是这个新数列也是收敛的,并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}A_n}{\lim\limits_{n\to\infty}B_n}.$$

(iv)假若有数列$\{E_n\}$满足

$$A_n\leqslant E_n\leqslant B_n,$$

并设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}B_n$,则$\{E_n\}$是收敛数列并且

$$\lim_{n\to\infty}E_n=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n.$$

在定理 3.1(iii)中我们须假定$\lim\limits_{n\to\infty}B_n\neq 0$. 但是$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=0$的情形却是非常重要,这时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$是不确定的. 对此须个别处理. 下面的定义 3.4 和例题 3.3 皆是这一种情形.

定义 3.4　设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=0$. $\lim\limits_{n\to\infty}B_n=0$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=0,$$

则称$\{A_n\}$是相对于$\{B_n\}$的高阶无穷小.

例题 3.3 试证

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=\dfrac{1}{4}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2S_{4n}-S_{2n})-(2S_{2n}-S_n)}{(2S_{2n}-S_n)-(2S_n-S_{\frac{n}{2}})}=\dfrac{1}{4}$.

证明 我们只证(i),而把(ii)留作习题,请大家自证,由前面的习题 3.1(iii)知本例题中的欲求极限皆不能直接用定理 3.1(iii)来求得. 但是经如下变形

$$\frac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=2\frac{a_{2n}c_{2n}}{a_nc_n}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{a_{2n}c_{2n}}{a_{2n}c_{2n}\left(1-\frac{1}{2}a_{2n}\right)(1-a_{2n})}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a_{2n}}\cdot\frac{1}{1-a_{2n}},$$

我们可以用定理 3.1(iii)来求极限了,即有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_{4n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a_{2n}}\cdot\frac{1}{1-a_{2n}}\right\}=\frac{1}{4}.$$

4 祖冲之不等式比刘徽的好

过去的经验告诉我们：祖冲之不等式的上、下界收敛到 π 的速度比刘徽的快．如何用确切的数学语言刻画这个“收敛快”的观念呢？以祖冲之的下界数列 $\left\{\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n\right\}$ 与刘徽的下界数列 $\{S_{2n}\}$ 相比较，数学上收敛快是指：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left(\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n\right)-\pi\right|}{|S_{2n}-\pi|}=0.$$

下面我们就来证明这个数学上收敛快的事实．由于

$$\pi-S_{2n}=\left(\lim_{k\to\infty}S_{2^k n}\right)-S_{2n}=\lim_{k\to\infty}\left(S_{2^k n}-S_{2n}\right)$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{k-1}\left(S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\left(S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n}\right),$$

$$\pi-\left(\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n\right)=$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}S_{2^{l+1}n}-\frac{1}{3}S_{2^l n}\right)-\left(\frac{4}{3}S_{2^l n}-\frac{1}{3}S_{2^{l-1}n}\right)\right\},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi-\left(\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_n\right)}{\pi-S_{2n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}S_{2^{l+1}n}-\frac{1}{3}S_{2^l n}\right)-\left(\frac{4}{3}S_{2^l n}-\frac{1}{3}S_{2^{l-1}n}\right)\right\}}{\sum_{l=1}^{\infty}\left(S_{2^{l-1}n}-S_{2^l n}\right)}.$$

上式右端的极限是复杂的.计算它时有一个窍门,那就是把式中的记号$\sum_{l=1}^{\infty}$看成像数一样,在分子与分母中同时消去.有人会以为这是傻瓜想出来的招,因此我们把这个窍门叫做傻瓜引理.

傻瓜引理 如果对固定的 l,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}S_{2^{l+1}n}-\frac{1}{3}S_{2^l n}\right)-\left(\frac{4}{3}S_{2^l n}-\frac{1}{3}S_{2^{l-1}n}\right)}{S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n}}=0,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{3}S_{2^{l+1}n}-\frac{1}{3}S_{2^l n}\right)-\left(\frac{4}{3}S_{2^l n}-\frac{1}{3}S_{2^{l-1}n}\right)\right\}}{\sum_{l=1}^{\infty}\left(S_{2^{l+1}n}-S_{2^l n}\right)}$$

$$=0.$$

现在我们不证傻瓜引理，因为下一节我们将证明定理 5.1，在那里从(i)推导出(ii)的论证可以移过来当做傻瓜引理的证明．眼下我们只来验证傻瓜引理的条件．由于

$$\frac{\left(\frac{4}{3}S_{2^{l+1}n}-\frac{1}{3}S_{2^{l}n}\right)-\left(\frac{4}{3}S_{2^{l}n}-\frac{1}{3}S_{2^{l-1}n}\right)}{S_{2^{l+1}n}-S_{2^{l}n}}$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{S_{2^{l}n}-S_{2^{l-1}n}}{S_{2^{l+1}n}-S_{2^{l}n}},$$

利用例题 3.3(i)的结论立得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}S_{2^{l+1}n}-\frac{1}{3}S_{2^{l}n}\right)-\left(\frac{4}{3}S_{2^{l}n}-\frac{1}{3}S_{2^{l-1}n}\right)}{S_{2^{l+1}n}-S_{2^{l}n}}=0.$$

由此我们知道，借助傻瓜引理我们能断言：$\left\{\frac{4}{3}S_{2n}-\frac{1}{3}S_{n}\right\}$收敛到 π 的速度在数学上比$\{S_{2n}\}$的速度快．

5 寻求收敛更快的数列

若令

$$E_n = S_{2^n \cdot 6}, \quad F_n = \frac{4}{3}S_{2^n \cdot 6} - \frac{1}{3}S_{2^{n-1} \cdot 6},$$

则上一节的讨论指出：与$\{E_n\}$相比，数列$\{F_n\}$更快地收敛于π. 于是我们可以这样来提问题：如果已知一个数列$\{A_n\}$收敛于π，如何去造一个新的数列$\{B_n\}$使得它收敛于π的速度比$\{A_n\}$的快？如果这个问题能解决，我们就可以造出比祖冲之不等式中的下界数列$\left\{\frac{4}{3}S_{2^n \cdot 6} - \frac{1}{3}S_{2^{n-1} \cdot 6}\right\}$收敛得更快的数列了.

设欲造的数列$\{B_n\}$可以写成如下形式

$$B_n = \lambda A_n + \mu A_{n-1},$$

其中λ, μ是两个待定的常数. 为了保证$\{B_n\}$收敛于π，即

$$\pi = \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}(\lambda A_n + \mu A_{n-1}) = (\lambda + \mu)\pi,$$

从而我们须使(λ,μ)满足

$$\lambda + \mu = 1.$$

在 $A_n = E_n = S_{2^n\cdot 6}$ 的情形，已经知道

$$(\lambda,\mu) = \left(\frac{4}{3},\quad \frac{1}{3}\right).$$

对于较一般的$\{A_n\}$，有一个用来确定(λ,μ)的定理.

定理 5.1 设$\{A_n\}$收敛于π，并且对于任意的 n，$A_n - A_{n-1} \neq 0$. 又设$\{A_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1} - A_n}{A_n - A_{n-1}} = \frac{1}{L},$$

其中 $L > 1$，则依次有

(i)令 $\lambda = \dfrac{L}{L-1}$，$\mu = \dfrac{-1}{L-1}$，便有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\lambda A_{n+1} + \mu A_n) - (\lambda A_n + \mu A_{n-1})}{A_{n+1} - A_n} = 0.$$

(ii)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{\infty}[(\lambda A_{n+i+1} + \mu A_{n+i}) - (\lambda A_{n+i} + \mu A_{n+i-1})]}{\sum_{i=1}^{\infty}(A_{n+i+1} - A_{n+i})} = 0.$$

(iii)数列$\{\lambda A_n+\mu A_{n-1}\}$比$\{A_n\}$更快地收敛于$\pi$,即$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\lambda A_n+\mu A_{n-1}-\pi}{A_n-\pi}\right|=0$.

在证明定理之前,我们指出:定理中关于$L>1$的条件是一个合理的假设.首先应假定$\frac{1}{L}\geqslant 0$,这时如果$\frac{1}{L}\geqslant 1$,那么数列$\{A_n\}$的收敛性会成问题,又如果$\frac{1}{L}=0$,那么$\{A_n\}$的收敛速度非常快,以致无须再找$\{B_n\}$了.这样一来,自然假定$0<\frac{1}{L}<1$,这相当于$L>1$.现在我们来证明定理5.1.由下列计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\lambda A_{n+1}+\mu A_n)-(\lambda A_n+\mu A_{n-1})}{A_{n+1}-A_n}$$

$$=\lambda+\mu\lim_{n\to\infty}\frac{A_n-A_{n-1}}{A_{n+1}-A_n}$$

$$=\lambda+\mu L=\frac{L}{L-1}+\left(-\frac{1}{L-1}\right)L=0,$$

故(i)成立.下面来证明(ii).由(i)知存在一个标准无穷小$\{\varepsilon_n\}$使得对于任意的n,

$$-\varepsilon_n\leqslant\frac{(\lambda A_{n+1}+\mu A_n)-(\lambda A_n+\mu A_{n-1})}{A_{n+1}-A_n}\leqslant\varepsilon_n.$$

注意到$\{\varepsilon_n\}$是单调下降的大于零的数列,即对于任意的正整数 $l\geqslant 0$,有 $\varepsilon_{n+l}\leqslant\varepsilon_n$,故有

$$-\varepsilon_n \leqslant \frac{(\lambda A_{n+l+1}+\mu A_{n+l})-(\lambda A_{n+l}+\mu A_{n+l-1})}{A_{n+l-1}-A_{n+l}} \leqslant \varepsilon_n.$$

由于$\frac{1}{L}>0$,故当 n 充分大之后,由定理的假设可推知:$(A_{n+1}-A_n)$与(A_n-A_{n-1})同时为正或同时为负.无妨假设:对所有的 n,$A_n-A_{n-1}<0$.那么上面式子导出

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon_n(A_{n+l-1}-A_{n+l})\\
&\geqslant(\lambda A_{n+l+1}+\mu A_{n+l})-(\lambda A_{n+l}+\mu A_{n+l-1})\\
&\geqslant\varepsilon_n(A_{n+l-1}-A_{n+l}).
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&-\varepsilon_n\sum_{l=1}^{N}(A_{n+l-1}-A_{n+l})\\
&\geqslant\sum_{l=1}^{N}\big[(\lambda A_{n+l+1}+\mu A_{n+l})\\
&\qquad-(\lambda A_{n+l}+\mu A_{n+l-1})\big]\\
&\geqslant\varepsilon_n\sum_{l=1}^{N}(A_{n+l-1}-A_{n+l}).
\end{aligned}$$

于是便有

$$-\varepsilon_n \leqslant \frac{\sum_{l=1}^{N}[(\lambda A_{n+l+1}+\mu A_{n+l})-(\lambda A_{n+l}+\mu A_{n+l-1})]}{\sum_{l=1}^{N}(A_{n+l+1}-A_{n+l})}$$

$$\leqslant \varepsilon_n .$$

对固定的 n，令 $N\to\infty$，上式的分子与分母分别有极限（它们是 $-(\lambda A_{n+1}+\mu A_n)$ 和 $-A_{n+1}$）. 利用引理 3.7(iii)，上面的不等式变为

$$-\varepsilon_n \leqslant$$

$$\frac{\sum_{l=1}^{\infty}[(\lambda A_{n+l+1}+\mu A_{n+l})-(\lambda A_{n+l}+\mu A_{n+l-1})]}{\sum_{l=1}^{\infty}(A_{n+l+1}-A_{n+l})} \leqslant \varepsilon_n .$$

再对上式取极限 $\lim\limits_{n\to\infty}$，利用引理 3.7(iv)立得定理 5.1 的(ii). 对于 $A_n-A_{n-1}>0$ 的情形，可类似处理，不再另说了. 至于上面推理过程中写道的“无妨假设：对所有的 n，$A_n-A_{n-1}<0$”，有无道理呢？须知那时只可假定：存在一个 n_0，对所有的 n，当 $n>n_0$ 时 $A_n-A_{n-1}<0$. 在这个新假定之下上面的推理照样进行下去，只是随时补上条件 $n>n_0$ 而已，这个补的条件在最后一步取 $\lim\limits_{n\to\infty}$ 时自然消失. 所以至此便证得(ii). (iii)的证明类似于节 4 中的讨论，在此不再另说了.

下面我们考虑定理 5.1 在$\{A_n\}$是祖冲之不等式的下界数列时的情形. 这时

$$A_n = \frac{4}{3}S_{2^n\cdot 6} - \frac{1}{3}S_{2^{n-1}\cdot 6},$$

我们需要计算

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-A_n}{A_n-A_{n-1}}.$$

由于

$$A_{n+1}-A_n = \frac{4}{3}(S_{2^{n+1}\cdot 6} - S_{2^n\cdot 6}) - \frac{1}{3}(S_{2^n\cdot 6} - S_{2^{n-1}\cdot 6})$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{2^n\cdot 6}{2}\cdot a_{2^n\cdot 6}c_{2^n\cdot 6} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2^{n-1}\cdot 6}{2}\cdot a_{2^{n-1}\cdot 6}c_{2^{n-1}\cdot 6}$$

$$= 2^{n+2}a_{2^n\cdot 6}c_{2^n\cdot 6} - 2^{n-1}a_{2^{n-1}\cdot 6}c_{2^{n-1}\cdot 6}$$

$$= 2^{n+2}a_{2^n\cdot 6}c_{2^n\cdot 6} - 2^{n-1}\cdot 8\cdot a_{2^n\cdot 6}c_{2^n\cdot 6}$$

$$\cdot(1-\frac{1}{2}a_{2^n\cdot 6})(1-a_{2^n\cdot 6})$$

$$= 2^{n+2}a_{2^n\cdot 6}c_{2^n\cdot 6}(\frac{3}{2}a_{2^n\cdot 6} - \frac{1}{2}(a_{2^n\cdot 6})^2),$$

$$A_n - A_{n-1} = 2^{n+1}a_{2^{n-1}\cdot 6}c_{2^{n-1}\cdot 6}\left(\frac{3}{2}a_{2^{n-1}\cdot 6} - \frac{1}{2}(a_{2^{n-1}\cdot 6})^2\right),$$

若令

$$u = a_{2^n\cdot 6},$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}u = 0,$$

并且还有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-A_n}{A_n-A_{n-1}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{3}{2}u-\frac{1}{2}u^2\right)}{8\left(1-\frac{u}{2}\right)(1-u)\left[\frac{3}{2}\cdot 4u\left(1-\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot(4u)^2\cdot\left(1-\frac{u}{2}\right)^2\right]}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}u\right)}{8\left(1-\frac{u}{2}\right)(1-u)\left[\frac{3}{2}\cdot 4\left(1-\frac{u}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot 16u\cdot\left(1-\frac{u}{2}\right)^2\right]}$$

$$=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}.$$

于是按定理 5.1 有

$$L=16,$$

$$B_n=\frac{16}{15}A_n-\frac{1}{15}A_{n-1}$$

$$=\frac{64}{45}S_{2^n\cdot 6}-\frac{20}{45}S_{2^{n-1}\cdot 6}+\frac{1}{45}S_{2^{n-2}\cdot 6},$$

并知$\{B_n\}$是收敛更快的数列.

这样的考虑可以继续下去,寻求比$\{B_n\}$收敛更快的数列,再进而追求更快的.这样的追求从原则上讲是没有困难的,因我们可以按定理5.1不断地算下去.但是越算越繁,这就形成了一个新的问题了.有兴趣的读者可以耐心读下面三节,看看如何处理这个"越算越繁"的问题.

6 越算越繁的问题初探

上节我们从数列$\{S_{2^n\cdot 6}\}$出发,按定理5.1算出L,便找到一个收敛快的数列.再对新的数列算出新的L,又找到一个更快的数列.如此手续进行下去,于是对更快数列的追求变成为不断地求L的过程.根据过去求L的经验,先将表达式

$$\frac{A_{n+1}-A_n}{A_n-A_{n-1}}$$

中诸个A_m用S_{2m}(或$\frac{m}{2}c_m$)表示出来,然后不断地用公式(见引理2.1)

$$\begin{cases} c_m = 2c_{2m}(1-a_{2m}), \\ a_m = 4a_{2m}\left(1-\frac{1}{2}a_{2m}\right) \end{cases}$$

代入,将表达式变为变元$a_{2^k n}$与$c_{2^k n}$的多项式之商,这里k须足够大,这时便能很容易求出L

了. 因此我们先来考察如何用 $a_{2^k n}$, $c_{2^k n}$ 表达 c_n 的式子. 不断地用引理 2.1 的公式代入,容易看出: c_n 可表为

$$c_n = \sum_{l=0}^{N_k} \alpha_l(k) c_{2^k n}(a_{2^k n})^l,$$

其中 N_k 是某一个确定的整数; $\alpha_l(k)$ 是常数,它依赖于 l, k,但是不依赖于 n! 经过试算,大家还容易知道 $\alpha_0(k) = 2^k$. 下面我们用归纳法证明:上述的 $N_k = 2^k - 1$. 当 $k = 1$ 时,显然 $N_1 = 1$. 假定 $N_k = 2^k - 1$,那么就有

$$c_n = \sum_{l=0}^{2^k-1} \alpha_l(k) c_{2^k n}(a_{2^k n})^l,$$

可见 $\left(\frac{c_n}{c_{2^k n}}\right)$ 是 $a_{2^k n}$ 的 $(2^k - 1)$ 次多项式. 将引理 2.1 的公式代入上式便得

$$c_n = \sum_{l=0}^{2^k-1} \alpha_l(k) \cdot 2C_{2^{k+1} n}(1 - a_{2^{k+1} n}) \cdot \left[4a_{2^{k+1} n}\left(1 - \frac{1}{2} a_{2^{k+1} n}\right)\right]^l,$$

又可见 $\left(\frac{c_n}{c_{2^{k+1} n}}\right)$ 是 $a_{2^{k+1} n}$ 的 $(1 + 2(2^k - 1))$ 次多项式. 注意到 $1 + 2(2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$. 于是 $N_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. 我们便归纳证出 $N_k = 2^k - 1$ 了.

由于我们须不断地求 L，k 也就不断地增大. 这使得我们要考虑上面 c_n 表达式的右端在 $k\to\infty$ 的情况. 特别地希望求出

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_l(k)c_{2^k n}(a_{2^k n})^l.$$

我们考虑 $k\to\infty$ 的情况本是不得已而求其次的做法，因为我们求不出 $\alpha_l(k)$ 的表达式，以便用之去不断地求 L.

令

$$\xi(n,k)=2^{k-1}c_{2^k n},$$

$$\eta(n,k)=2\cdot 4^k a_{2^k n},$$

则有

引理 6.1 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi(n,k)=\dfrac{\pi}{n}$,

$$\lim_{k\to\infty}\eta(n,k)=\left(\frac{\pi}{n}\right)^2.$$

证明 由于刘徽的等式 $S_{2n}=\dfrac{n}{2}c_n$ 和引理 2.1 证明中的一个等式 $c_{2n}=\sqrt{2a_n}$，便有

$$\xi(n,k)=2^{k-1}c_{2^k n}=2^{k-1}\cdot\frac{2}{2^k n}S_{2^{k+1}n}=\frac{1}{n}S_{2^{k+1}n},$$

$$\eta(n,k)=2.4^k a_{2^k n}=2.4^k\cdot\frac{1}{2}c^2_{2^{k+1}n}$$

$$=2^k c^2_{2^{k+1}n}=\left(\frac{1}{n}S_{2^{k+2}n}\right)^2.$$

从而引理得证.

从引理 6.1 得

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_l(k)c_{2^kn}(\alpha_{2^kn})^l = \left(\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_l(k)}{2^{2kl+k+l-1}}\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2l+1}.$$

从而我们来考察

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha_l(k)}{2^{2kl+k+l-1}}.$$

为方便计,我们以下面定义的 $H_l(k)$ 来取代 $\alpha_l(k)$ 进行讨论. 注意到 $\xi(n,0)=\frac{1}{2}c_n$,照上面的做法,不断地用引理 2.1 的公式代入便有

$$\xi(n,0) = \sum_{l=0}^{2^k-1}H_l(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^l.$$

引理 6.2 存在惟一的一组数 $\{H_l(k)\}$,其中 $k=0,1,2,\cdots;l=0,1,2,\cdots,2^k-1$,使得对于任意的整数 $n\geqslant 6$,等式

$$\xi(n,0) = \sum_{l=0}^{2^k-1}H_l(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^l$$

成立.

证明 我们已经知道,不断地将引理 2.1 中的公式代入 $\xi(n,0)$ 中,便给出数组 $\{H_l(k)\}$ 的存在性. 因此我们只须证明惟一性了. 设又有

一组数$\{\widetilde{H_l}(k)\}$满足引理 6.2 的要求，若令 $F_l(k)=H_l(k)-\widetilde{H_l}(k)$. 我们来证明对所有的 k,l，有

$$F_l(k)=0.$$

由于 $H_l(k)$与$\widetilde{H_l}(k)$都满足引理 6.2 的要求，故有

$$\sum_{l=0}^{2^k-1} F_l(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^l=0,$$

亦即有

$$\sum_{l=0}^{2^k-1} F_l(k)(\eta(n,k))^l=0.$$

现在考察多项式(以 X 为变元)

$$\sum_{l=0}^{2^k-1} F_l(k)X^l.$$

易知它至多是 2^k-1 次的多项式，从而至多有 2^k-1 个不同的根，除非它的系数全部为零. 由于这个多项式有根 $\eta(2^S,k)$，这里 $S=2,3,4,\cdots$并且

$$\eta(2^{S_1},k)=\eta(2^{S_2},k)$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot 4^k a_{2^{k+S_1}}=2\cdot 4^k a_{2^{k+S_2}}$$

$$\Leftrightarrow a_{2^{k+S_1}}=a_{2^{k+S_2}}$$

$$\Leftrightarrow S_1=S_2,$$

故知这个多项式有无穷多个不同的根.从而

$$F_l(k)=0,$$

这就证明了引理 6.2.

引理 6.3 对于 $k\geqslant 0, m\geqslant 0$ 有

$$H_m(k+1)=H_m(k)+\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{m-1}{2}}H_{m-l-1}(k)$$

$$\cdot\left[\binom{m-l-1}{l}+\binom{m-l}{l+1}\right]\left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{l+1},$$

其中记号 $\sum\limits_{0\leqslant l\leqslant\frac{m-1}{2}}$ 表示对满足不等式

$$0\leqslant l\leqslant\frac{m-1}{2}$$

的一切整数 l 求和，$\binom{m}{s}$ 是组合数，它等于 $\frac{m!}{s!\,(m-s)!}$. 这里 $m!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m$，称为 m 的阶乘，另外，还约定 $0!=1$.

证明 我们约定：当 $l\geqslant 2^k$ 时，$H_l(k)=0$，于是这时

$$\sum_{l=0}^{2^k-1}H_l(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^l$$

可以记为

$$\sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^l.$$

由引理 2.1 可推得

$$\begin{cases}\xi(n,k) = \xi(n,k+1)\left(1 - \frac{2}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right),\\ \eta(n,k) = \eta(n,k+1)\left(1 - \frac{1}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right).\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}\xi(n,0) &= \sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^l\\ &= \sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1)\left(1 - \frac{2}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right)\\ &\quad\cdot(\eta(n,k+1))^l\left(1 - \frac{1}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right)^l\\ &= \sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1)\eta(n,k+1)^l\\ &\quad\cdot\left(1 - \frac{1}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right)^{l+1}\\ &\quad+\sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1)\left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)\\ &\quad\cdot(\eta(n,k+1))^{l+1}\cdot\left(1 - \frac{1}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right)^l\\ &= \sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1)\\ &\quad\cdot\left\{\sum_{s=0}^{l+1}\binom{l+1}{s}\left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^s(\eta(n,k+1))^{l+s}\right\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& + \sum_{l \geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1) \\
& \cdot \left\{ \sum_{s=0}^{l} \binom{l}{s} \left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{s+1} (\eta(n,k+1))^{l+s+1} \right\} \\
= & \sum_{l \geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^{l} \\
& + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=1}^{l+1} H_l(k)\xi(n,k+1) \binom{l+1}{s} \\
& \cdot \left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{s} (\eta(n,k+1))^{l+s} \\
& + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{l} H_l(k)\xi(n,k+1) \binom{l}{s} \\
& \cdot \left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{s+1} (\eta(n,k+1))^{l+s+1} \\
= & \sum_{l \geq 0} H_l(k)\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^{l} \\
& + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{l} H_l(k)\xi(n,k+1) \left[\binom{l+1}{s+1} + \binom{l}{s} \right] \\
& \cdot \left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{s+1} (\eta(n,k+1))^{l+s+1}.
\end{aligned}
$$

上式中最后一项可以写为

$$
\sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{l} f(l,s,k,n),
$$

其中

$$f(l,s,k,n)=H_l(k)\left[\binom{l}{s}+\binom{l+1}{s+1}\right]$$

$$\cdot\left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{s+1}\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^{l-s-1}.$$

若令

$$\begin{cases}m=l+s+1,\\ t=s,\end{cases}$$

那么便有

$$\begin{cases}l=m-t-1,\\ s=t.\end{cases}$$

可见，若 l 与 s 皆是整数，则 m 与 t 也皆是整数，并且反之亦然. 当我们把满足下列等式

$$\begin{cases}0\leqslant l\leqslant 2^k-1,\\ 0\leqslant s\leqslant l\end{cases}$$

的整数偶(l,s)的集合记为

$$D=\{(l,s)\mid 0\leqslant l\leqslant 2^k-1,0\leqslant s\leqslant l\}$$

时，那么相应的整数偶(m,t)就应满足

$$\begin{cases}0\leqslant m-t-1\leqslant 2^k-1,\\ 0\leqslant t\leqslant m-t-1,\end{cases}$$

也就是满足

$$\begin{cases} 1 \leqslant m \leqslant 2^{k+1} - 1, \\ 0 \leqslant t \leqslant \dfrac{m-1}{2}, \end{cases}$$

从而整数偶(m, t)的集合是

$$\overline{D} = \left\{ (m, t) \quad 1 \leqslant m \leqslant 2^{k+1} - 1, 0 \leqslant t \leqslant \frac{m-1}{2} \right\}.$$

这时

$$\sum_{l \geqslant 0} \sum_{s=0}^{l} f(l, s, k, n) = \sum_{(l,s) \in D} f(l, s, k, n)$$

$$= \sum_{(m,t) \in \overline{D}} f(m - t - 1, t, k, n)$$

$$= \sum_{m=1}^{2^{k+1}-1} \sum_{0 \leqslant t \leqslant \frac{m-1}{2}} f(m - t - 1, t, k, n).$$

于是前面计算过的等式可写为

$$\xi(n, 0) = \sum_{m=0}^{2^k - 1} H_m(k) \xi(n, k+1)(\eta(n, k+1))^m$$

$$+ \sum_{m=1}^{2^{k+1}-1} \sum_{0 \leqslant t \leqslant \frac{m-1}{2}} H_{m-t-1}(k) \left[\binom{m-t-1}{t} + \binom{m-t}{t+1} \right]$$

$$\cdot \left(-\frac{1}{4^{k+2}} \right)^{t+1} \xi(n, k+1)(\eta(n, k+1))^m.$$

上式与

$$\xi(n,0) = \sum_{m=0} H_m(k+1)\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^m$$

比较,再用引理 6.2 立得本引理的证明.

利用引理 6.3,我们做一些计算,可以得到

(1) $H_0(k)=1$,

(2) $H_1(k)=-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^k$,

(3) $H_2(k)=\frac{1}{5!}-\frac{5}{5!}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{4}{5!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}$,

(4) $H_3(k)=-\frac{1}{7!}+\frac{14}{7!}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\frac{49}{7!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}$
$+\frac{36}{7!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3k}$,

(5) $H_4(k)=\frac{1}{9!}-\frac{30}{9!}\left(\frac{1}{4}\right)^k+\frac{273}{9!}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}-$
$\frac{820}{9!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{3k}+\frac{576}{9!}\left(\frac{1}{4}\right)^{4k}$.

(上面的计算,大家可以不做,因为它不影响后面的论证.)上面的计算结果使我们猜测下列的一个极限等式

$$\lim_{k\to\infty} H_m(k) = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}.$$

下面我们着手证明这个猜测.为了证明这个猜测,我们先对 $\eta(n,0)$ 作相应于对 $\xi(n,0)$ 的讨论.不断地利用下式(在引理 6.3 的证明过程中出现过的):

$$\eta(n,k)=\eta(n,k+1)\left(1-\frac{1}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right).$$

可以将 $\eta(n,0)$写为

$$\eta(n,0)=\sum_{l=1}^{2^k}h_l(k)(\eta(n,k))^l.$$

如同引理6.2的情形，这里的 $h_l(k)$也是惟一确定的. 仿照引理6.3，我们能够证出下列引理.

引理6.4 对于 $k\geqslant 0, m\geqslant 1$ 有

$$h_m(k+1)=h_m(k)$$

$$+\sum_{\frac{m}{2}\leqslant l\leqslant m-1}\binom{l}{2l-m}(-1)^{m-l}\left(\frac{1}{4}\right)^{(k+2)(m-l)}h_l(k).$$

证明 首先有

$$\eta(n,0)=\sum_{l\geqslant 1}h_l(k)(\eta(n,k))^l$$

$$=\sum_{l\geqslant 1}h_l(k)\left[\eta(n,k+1)\left(1-\frac{1}{4^{k+2}}\eta(n,k+1)\right)\right]^l$$

$$=\sum_{l\geqslant 1}\sum_{s=0}^{l}h_l(k)\cdot\binom{l}{s}\cdot\left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^s\cdot(\eta(n,k+1))^{l+s},$$

接着仿照引理6.3的证明中之计算得

$$\eta(n,0)=\sum_{m\geqslant 1}\sum_{\frac{m}{2}\leqslant t\leqslant m}\binom{t}{2t-m}(-1)^{m-t}\left(\frac{1}{4}\right)^{(k+2)(m-t)}$$

$$\cdot h_l(k)(\eta(n,k+1))^m,$$

于是证得引理.

引理 6.5 对于 $k\geqslant 0, m\geqslant 1$ 有

$$h_m(k+1) = \frac{1}{4^{m-1}}h_m(k) - \sum_{l=1}^{m-1} h_l(k)h_{m-l}(k)\left(\frac{1}{4}\right)^m.$$

证明 首先由于

$$\eta(2^k n, s) = 2.4^s a_{2^{k+s}n} = \frac{1}{4^k}(2\cdot 4^{k+s}a_{2^{k+s}n})$$

$$= \frac{1}{4^k}\eta(n, k+s),$$

故有

$$\eta(n,0) = \eta(n,1) - \frac{1}{16}(\eta(n,1))^2$$

$$= 4\eta(2n,0) - \frac{1}{16}(4\eta(2n,0))^2$$

$$= 4\eta(2n,0) - (\eta(2n,0))^2$$

$$= 4\sum_{m\geqslant 1} h_m(k)(\eta(2n,k))^m$$

$$- \left[\sum_{m\geqslant 1} h_m(k)(\eta(2n,k))^m\right]^2$$

$$= 4\sum_{m\geqslant 1} h_m(k)\left(\frac{1}{4}\eta(n,k+1)\right)^m$$

$$- \left[\sum_{m\geqslant 1} h_m(k)\left(\frac{1}{4}\eta(n,k+1)\right)^m\right]^2$$

$$= \sum_{m\geq 1} \frac{1}{4^{m-1}} h_m(k)(\eta(n,k+1))^m$$

$$\sum_{m_1\geq 1}\sum_{m_2\geq 1} h_{m_1}(k) h_{m_2}(k)\left(\frac{1}{4}\right)^{m_1+m_2}$$

$$\cdot(\eta(n,k+1))^{m_1+m_2}$$

$$= \sum_{m\geq 1}\Big[\frac{1}{4^{m-1}} h_m(k)$$

$$- \sum_{1\leq l\leq m-1} h_l(k) h_{m-l}(k)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m\Big]$$

$$\cdot(\eta(n,k+1))^m.$$

上式与

$$\eta(n,0) = \sum_{m\geq 1} h_m(k+1)(\eta(n,k+1))^m$$

比较立得引理之证明.

引理 6.6 当 $m\geq 1$ 时,

$$\lim_{k\to\infty} h_m(k) = \frac{2\cdot(-1)^{m+1}}{(2m)!}.$$

证明 当 $m=1$ 时,由引理 6.4 得

$$h_1(k+1) = h_1(k).$$

又易知 $h_1(0)=1$,故 $\lim\limits_{k\to\infty} h_1(k)=1$,从而引理在 $m=1$ 时是正确的. 设在 $l\leq m-1$ 且 $l\geq 1$ 时有 $\lim\limits_{k\to\infty} h_l(k) = \frac{2\cdot(-1)^{l+1}}{(2l)!}$,那么这时 $m\geq 2$. 从

引理6.4和6.2推得

$$\left(\frac{1}{4^{m-1}}-1\right)h_m(k)=\sum_{l=1}^{m-1}h_l(k)h_{m-l}(k)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$+\sum_{\frac{m}{2}\le l\le m-1}\binom{l}{2l-m}(-1)^{m-l}\left(\frac{1}{4}\right)^{(k+2)(m-l)}h_l(k),$$

从上式右端有极限可知$\lim\limits_{k\to\infty}h_m(k)$存在，且

$$\left(\frac{1}{4^{m-1}}-1\right)\lim_{k\to\infty}h_m(k)=\sum_{l=1}^{m-1}\left(\lim_{k\to\infty}h_l(k)\right)\left(\lim_{k\to\infty}h_{m-l}(k)\right)\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$=\sum_{l=1}^{m-1}\frac{2\cdot(-1)^{l+1}}{(2l)!}\cdot\frac{2\cdot(-1)^{m-l+1}}{(2(m-l))!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$=4\cdot(-1)^m\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m\sum_{l=1}^{m-1}\frac{1}{(2m)!}\binom{2m}{2l}$$

$$=(-1)^m\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}\left\{\sum_{l=0}^{m}\binom{2m}{2l}-2\right\}\frac{1}{(2m)!}.$$

由于

$$\sum_{l=0}^{m}\binom{2m}{2l}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{s=0}^{2m}\binom{2m}{s}+\sum_{s=0}^{2m}(-1)^s\binom{2m}{S}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1+1)^{2m}+(1-1)^{2m}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4^m,$$

故由前式推出

$$\lim_{k\to\infty} h_m(k) = \left(\frac{1}{4^{m-1}} - 1\right)^{-1} \cdot (-1)^m$$

$$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \left|\frac{1}{2} \cdot 4^m - 2\right| \frac{1}{(2m)!}$$

$$= \left(\frac{1}{4^{m-1}} - 1\right)^{-1} \cdot (-1)^m \cdot 2$$

$$\cdot \left|1 - \frac{1}{4^{m-1}}\right| \cdot \frac{1}{(2m)!}$$

$$= \frac{2 \cdot (-1)^{m-1}}{(2m)!}.$$

这样一来，我们便用数学归纳法证明了引理 6.6.

引理 6.7 $H_0(k+1) = H_0(k)$，并且对于 $m \geqslant 1$，

$$H_m(k+1) = \left(\frac{1}{4}\right)^m H_m(k)$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^m \sum_{s=1}^{m} H_{m-s}(k) h_s(k).$$

证明 仿照引理 6.5 的证明，首先我们有

$$\xi(n,0) = \xi(n,1)\left(1 - \frac{2}{4^2}\eta(n,1)\right)$$

$$= 2\xi(2n,0)\left(1-\frac{1}{2}\eta(2n,0)\right)$$

$$= 2\left\{\sum_{l\geq 0} H_l(k)\xi(2n,k)(\eta(2n,k))^l\right\}$$

$$\cdot\left\{1-\frac{1}{2}\sum_{S\geq 1} h_S(k)(\eta(2n,k))^S\right\}$$

$$= \sum_{l\geq 0} H_l(k)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^l\xi(n,k+1)(\eta(n,k$$

$$+1))^l - \sum_{l\geq 0}\sum_{S\geq 1}\frac{1}{2}H_l(k)h_S(k)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{l+s}\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^{l+s}$$

$$= H_0(k)\xi(n,k+1)$$

$$+\sum_{m\geq 1}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^m H_m(k)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^m\sum_{s=1}^{m}H_{m-s}(k)h_s(k)\right\}$$

$$\cdot\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^m.$$

接着与

$$\xi(n,0)=\sum_{m\geq 0}H_m(k+1)\xi(n,k+1)(\eta(n,k+1))^m$$

比较即得引理之证明.

引理 6.8 对于 $m\geqslant 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}H_m(k)=\dfrac{(-1)^m}{(2m+1)!}$.

证明 由引理 6.3 得

$$H_0(k+1)=H_0(k).$$

又知 $H_0(0)=1$，故 $\lim\limits_{k\to\infty}H_0(k)=1$. 这表明在 $m=0$ 时引理正确. 对于满足 $0\leqslant l<m$ 的 l，假设

$$\lim_{k\to\infty}H_l(k)=\frac{(-1)^l}{(2l+1)!}.$$

这时 $m\geqslant1$，故可用引理 6.3 和 6.7 我们得

$$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^m-1\right]H_m(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^m\sum_{s=1}^{m}H_{m-s}(k)h_s(k)$$

$$+\sum_{0\leqslant l\leqslant\frac{m-1}{2}}H_{m-l-1}(k)\left[\binom{m-l-1}{l}\right.$$

$$\left.+\binom{m-l}{l+1}\right]\left(-\frac{1}{4^{k+2}}\right)^{l+1}.$$

上式右端在 $k\to\infty$ 时极限存在，故 $\lim\limits_{k\to\infty}H_m(k)$ 存在并且由归纳假设和引理 6.6 进而有

$$\left[\left(\frac{1}{4}\right)^m-1\right]\lim_{k\to\infty}H_m(k)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$\cdot\sum_{s=1}^{m}\frac{(-1)^{m-s}}{(2m-2s+1)!}\cdot\frac{2\cdot(-1)^{s+1}}{(2s)!}$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m+1)!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m\sum_{s=1}^{m}\binom{2m+1}{2s}$$

$$=\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)!}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^m$$

$$\cdot\left\{\sum_{s=0}^{m}\binom{2m+1}{2s}-1\right\}.$$

由于

$$\sum_{s=0}^{m}\binom{2m+1}{2s}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{l=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{l}\right.$$

$$\left.+\sum_{l=0}^{2m+1}(-1)^{l}\binom{2m+1}{l}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(1+1)^{2m+1}+(1-1)^{2m+1}\right\}=4^{m},$$

故由前式推出

$$\lim_{k\to\infty}H_{m}(k)=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{m}-1\right]^{-1}$$

$$\cdot\frac{(-1)^{m-1}}{(2m+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{m}\cdot\left\{4^{m}-1\right\}$$

$$=\frac{(-1)^{m}}{(2m+1)!}.$$

于是我们用数学归纳法证明了引理 6.8.

证得引理 6.8 之后，我们停下来看一看这个引理的含意. 这就构成了下面的节 7.

7 泰勒展开定理

上一节我们引入$\{H_m(k)\}$，其中 m 与 k 是大于或等于零的整数，并且当 $m \geqslant 2^k$ 时，$H_m(k)=0$. 而后证明了

$$\xi(n,0) = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^m,$$

$$\lim_{k\to\infty} H_m(k) = \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}.$$

利用上式和引理 6.1，我们作如下的"形式推导"：

$$\begin{aligned}\xi(n,0) &= \lim_{k\to\infty}\xi(n,0) = \lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty} H_m(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\lim_{k\to\infty}[H_m(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^m] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}.\end{aligned}$$

在上面的"形式推导"中，隐藏了一个含混的等式，它就是

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}H_m(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^m$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\lim_{k\to\infty}H_m(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^m.$$

我们暂时不来非难这个含混的等式,因为"形式推导"利用它给出下列的

泰勒展开定理

$$\xi(n,0)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}.$$

泰勒展开定理看起来既漂亮又深刻,而那个含混的等式却显得不怎么样.其实它们是彼此等价的.为此请大家做一个容易的习题 7.1.在做习题之前,请注意泰勒展开定理的确切含意是

$$\lim_{N\to\infty}\left(\xi(n,0)-\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}\right)=0.$$

习题 7.1 试证下列(i),(ii),(iii)彼此等价.

(i)泰勒展开定理.

(ii)含混的等式.

(iii)$\lim\limits_{N\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}R_N(n,k)=0$,其中

$$R_N(n,k)=\sum_{m=N+1}^{\infty}H_m(k)\xi(n,k)(\eta(n,k))^m.$$

泰勒展开定理有两个显然的推论.

推论 1 级数 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}$ 是收敛的.换句话说,若令

$$B_N=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1},$$

则数列 $\{B_N\}$ 是收敛的.

注 建议大家不用泰勒展开定理来证明这个推论 1.这是一个很有教益的练习.它涉及到对"收敛"观念的理解问题.有了正确的理解,做起来很容易.没有这种"正确理解"想要自己悟出来,那是异常困难的.那是大数学家曾经干过的事,即悟出一个"柯西收敛准则".

推论 2(带皮亚诺余项的泰勒公式) 对于任意 N,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2N+1}\left[\xi(n,0)-\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}\right]=0.$$

证明 用泰勒展开定理有

$$\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2N+1}\left[\xi(n,0)-\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}\right]$$

$$=\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2N+1}\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{N+m}}{(2N+2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m}$$

从而

$$\left|\left(\frac{n}{\pi}\right)^{2N+1}\left[\xi(n,0)-\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}\right]\right|$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2N+2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m}$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m} = \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{1-\left(\frac{\pi}{n}\right)^2} = 0,$$

并用定理 3.7(iv)立得推论 2 的证明.

推论 2 将在下一节被用来干净利索地处理那个"越算越繁的问题",而泰勒展开定理还可以被用来推广节 2 中的祖冲之不等式. 但是我们不打算证明泰勒展开定理或推论 2,一来证起来麻烦,从习题 7.1 显示,必须要对 $H_m(k)$ 有更深入的了解,二来它们是微积分学中熟知定理的特例. 在微积分学中有关于函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的泰勒展开定理,现陈述如下:

定理 对于开区间(-1,1)中的任何实数 x,有

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1},$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}.$$

从单位圆内图形的讨论，容易看出

$$\xi(n,0) = \frac{1}{2} c_n = \frac{1}{2} \cdot \left(2\sin\frac{2\pi}{2n}\right) = \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\eta(n,0) = 2a_n = 2\left(1 - \cos\frac{2\pi}{2n}\right) = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right).$$

从而微积分中的定理给出

$$\xi(n,0) = \sin\frac{\pi}{n} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1},$$

$$\eta(n,0) = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = 2\left(1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \cdot (-1)^{m+1}}{(2m)!} \left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m}.$$

这正是我们上一节讨论的结果经“形式推导”得到的泰勒展开定理.

8 越算越繁的问题之解决

这一节我们将用上节的推论 2，即带皮亚诺余项的泰勒公式，解决前面提到的“越算越繁的问题”.

为叙述简单，我们引进一个记号 $o(1)$，它表示任何一个确定了的无穷小，即是某一个数列 $\{\alpha_n\}$，它具有性质：$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 对于这个记号，易见有如下的计算公式

$$o(1)\pm o(1)=o(1),$$

$$o(1)\cdot o(1)=o(1),$$

$$c\cdot o(1)=o(1),\text{这里 } c \text{ 是一个常数.}$$

利用这个记号，带皮亚诺余项的泰勒公式可以写为

$$\xi(n,0)=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}+\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2N+1}\cdot o(1),$$

其中 N 是任意的正整数. 上式的确切含意是: 对于任意的 N, 存在一个数列 $\{\alpha_n^{(N)}\}$, 其中 $n=1,2,\cdots$ 使得 $\{\alpha_n^{(N)}\}$ 是 $o(1)$ 的一个代表, 即满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^{(N)}=0$, 此外还有等式

$$\xi(n,0)=\sum_{m=0}^{N}\frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2m+1}+\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2N+1}\alpha_n^{(N)}.$$

设 $A_n^{(o)}=S_{2^n 6}$, 那么

$$A_n^{(o)}=\frac{2^{n-1}6}{2}C_{2^{n-1}\cdot 6}=3\cdot 2^n\left(\frac{1}{2}C_{2^n\cdot 3}\right)=3\cdot 2^n\xi(3\cdot 2^n,o)$$

$$=\pi+\sum_{m=1}^{N}\frac{(-1)^m\pi^{2m+1}}{(2m+1)!9^m}\left(\frac{1}{4}\right)^{mn}+\left(\frac{1}{4}\right)^{Nn}\cdot o(1).$$

在上式中取 $N=1$, 则有

$$A_{n+1}^{(o)}-A_n^{(o)}=\frac{-\pi^3}{3!9}\cdot\left[\left(\frac{1}{4}\right)^1-1\right]\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot o(1),$$

$$A_n^{(o)}-A_{n-1}^{(o)}=\frac{-\pi^3}{3!9}\cdot[1-4]\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot o(1).$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}^{(o)}-A_n^{(o)}}{A_n^{(o)}-A_{n-1}^{(o)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{1}{4}-1\right]+o(1)}{[1-4]+o(1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}-1}{1-4}=\frac{1}{4}.$$

按定理 5.1 取

$$L_1=4,$$

$$\lambda_1=\frac{L_1}{L_1-1}=\frac{4}{3},$$

$$\mu_1=-\frac{1}{L_1-1}=-\frac{1}{3},$$

$$A_n^{(1)}=\lambda_1 A_n^{(o)}+\mu_1 A_{n-1}^{(o)}.$$

关于 $A_n^{(o)}$ 的带皮亚诺余项的泰勒公式代入上式得

$$A_n^{(1)}=\pi+\sum_{m=2}^{N}\frac{(-1)^m\pi^{2m+1}}{(2m+1)!9^m}(\lambda_1+\mu_1 4^m)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{mn}+\left(\frac{1}{4}\right)^{Nn}\cdot o(1).$$

在上式中取 $N=2$,则有

$$A_{n+1}^{(1)}-A_n^{(1)}=\frac{\pi^5}{5!9^2}(\lambda_1+\mu_1 4^2)\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2-1\right]$$

$$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot o(1),$$

$$A_n^{(1)} - A_{n-1}^{(1)} = \frac{\pi^5}{5!9^2}(\lambda_1 + \mu_1 4^2)$$

$$\cdot [1 - 4^2]\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \cdot o(1).$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_{n+1}^{(1)} - A_n^{(1)}}{A_n^{(1)} - A_{n-1}^{(1)}} = \frac{\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1\right]}{[1 - 4^2]} = \frac{1}{4^2}.$$

从而令

$$L_2 = 4^2,$$

$$\lambda_2 = \frac{4^2}{4^2 - 1},$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{4^2 - 1},$$

$$A_n^{(2)} = \lambda_2 A_n^{(1)} + \mu_2 A_{n-1}^{(1)}.$$

从 $A_n^{(1)}$ 的泰勒公式推得 $A_n^{(2)}$ 的泰勒公式为

$$A_n^{(2)} = \pi + \sum_{m=3}^{N} \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{(2m+1)!9^m}(\lambda_1 + \mu_1 4^m)(\lambda_2 + \mu_2 4^m)$$

$$\cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{mn} + \left(\frac{1}{4}\right)^{3n} \cdot o(1).$$

上述的讨论进行下去,便有

$$L_s = 4^s,$$

$$\lambda_s = \frac{4^s}{4^s - 1},$$

$$\mu_s = -\frac{1}{4^s - 1},$$

$$\begin{aligned} A_n^{(s)} &= \lambda_s A_n^{(s-1)} + \mu_s A_{n-1}^{(s-1)} \\ &= \pi + \sum_{m=s+1}^{N} \frac{(-1)^m \pi^{2m+1}}{(2m+1)!\ 9^m} (\lambda_1 + \mu_1 4^m) \\ &\quad \cdot (\lambda_2 + \mu_2 4^m) \cdots (\lambda_s + \mu_s 4^m) \left(\frac{1}{4}\right)^{mn} \\ &\quad + \left(\frac{1}{4}\right)^{Nn} \cdot o(1). \end{aligned}$$

注意上式中 $m \geqslant s+1 \geqslant 2$,从而$(\lambda_s + \mu_s 4^m) = \frac{4^s - 4^m}{4^s - 1} \neq 0$. 利用定理 5.1,容易推出下列定理.

定理 8.1 设给定 $A_n^{(0)} = S_{2^n \cdot 6}$. 对于 $s < n$,令

$$A_n^{(s)} = \frac{4^s}{4^s - 1} A_n^{(s-1)} - \frac{1}{4^s - 1} A_{n-1}^{(s-1)},$$

则有

(i) $\lim_{n\to\infty} A_n^{(s)} = \pi$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{A_n^{(s+1)} - \pi}{A_n^{(s)} - \pi} \right| = 0$

这样我们便解决了那个越算越繁的问题，类似地还可得

定理 8.2 设给定 $B_n^{(0)} = 2S_{2^n\cdot 6} - S_{2^{n-1}\cdot 6}$，对于$s < n$，令

$$B_n^{(s)} = \frac{4^s}{4^s - 1} B_n^{(s-1)} - \frac{1}{4^s - 1} B_{n-1}^{(s-1)},$$

则有

(i) $\lim_{n\to\infty} B_n^{(s)} = \pi$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{B_n^{(s+1)} - \pi}{B_n^{(s)} - \pi} \right| = 0$.

此外利用上一节的关于 $\xi(n,0)$的泰勒展开定理，进一步论证可推出

定理 8.3 设 $A_n^{(s)}$，$B_n^{(s)}$ 的定义如上，则有推广的祖冲之不等式

$$A_n^{(s)} < \pi < B_n^{(s)}.$$

注 定理 8.1 和定理 8.2 是微积分发明之后的一种外推极限法的特例. 因此祖暅的绝招其实就是外推极限法. 日本的关氏和算中也出现此法.

最后我们来看看定理 8.3 中的不等式

$$A_4^{(3)} < \pi < B_4^{(3)}.$$

经计算得

$$A_4^{(3)} = \frac{4096}{2835}\pi_{48} - \frac{1344}{2835}\pi_{24} + \frac{84}{2835}\pi_{12} - \frac{1}{2835}\pi_6,$$

$$B_4^{(3)} = \frac{8192}{2835}\pi_{48} - \frac{6784}{2835}\pi_{24} + \frac{1512}{2835}\pi_{12} - \frac{86}{2835}\pi_6 + \frac{1}{2835}\pi_3,$$

其中 $\pi_m = S_{2m}$. 用现代计算工具算出 π_6, π_{12}, π_{24}, π_{48}之后便得

$$A_4^{(3)} = 3.141592653\cdots, B_4^{(3)} = 3.141592656\cdots.$$

因此算到内接正四十八边形可得不等式

$$3.141592653 < \pi < 3.141592657.$$

我们到了该结束这本小册子的时候了. 在结束之际, 想作一点说明. 本小册子是一本科普读物, 许多想法来自近代数学, 虽然写的却是关于中国古代的割圆术. 因此文中的一些构想和论证, 千万别当做历史资料来引用, 以免干扰真正的中国古代数学史的研究. 吴文俊先生说得好:"在中国古代数学史研究中, 有两条需要严格遵守的原则, 即

原则一: 所有研究结论应该在幸存至今的原著基础上得出.

原则二: 所有结论应该利用古人当时的知

识、辅助工具和惯用的推理方法得出.”

吴文俊先生的话是我们应当遵循的原则.希望我们以后能有机会贯彻这样的原则,更好地发掘中华民族的珍贵遗产.

参 考 文 献

[1] 华罗庚.从祖冲之的圆周率谈起.北京:人民教育出版社,1964
[2] 吴文俊.吴文俊论数学机械化.济南:山东教育出版社,1995
[3] 郭书春.九章算术.沈阳:辽宁教育出版社,1990
[4] 郭书春.刘徽.见:吴文俊主编,世界著名数学家传记,第188~216页.北京:科学出版社,1995
[5] 杜石然.祖冲之.见:吴文俊主编,世界著名数学家传记,第231~244页.北京:科学出版社,1995
[6] 傅溥.中国数学发展史.中华文化丛书,1982
[7] 龚升.从刘徽割圆谈起.北京:人民教育出版社,1964
[8] 夏道行.π和e.上海:上海教育出版社,1964
[9] 查有梁.牛顿力学的横向研究.成都:四川教育出版社,1987
[10] 吕涛.祖冲之不等式与缀术之谜寻踪.四川教育学院学报,1996,第12卷
[11] 虞琪.祖冲之是如何计算π的? 数学通报,2000,第3期,第36~39页